

# 带挤压油膜阻尼器的柔性转子非线性响应的 Duffing 特性分析

西北工业大学 孟 光 薛中擎

## 摘 要

本文导出柔性转子-同心型挤压油膜阻尼器系统稳态响应的骨架曲线及振幅界限曲线, 分析系统幅频曲线、骨架曲线及振幅界限曲线之间的关系及其对双稳态响应的影响, 说明附加分枝解产生的可能性, 证明对简单 Jeffcott 转子, 系统的频响曲线总是具有硬特性, 油膜力的引入并不改变原系统的临界点, 且双稳态在转速比  $\Omega < 1$  及  $\Omega > 1$  的区间内都可能发生。

## 一、前 言

挤压油膜阻尼器 (简称 SFDB) 是减小旋转机械转子振动, 延长寿命的一种重要手段。挤压油膜力具有高度的非线性, 而双稳态响应是转子-SFDB 系统非线性响应的重要表现形式, 它的出现, 使转子在很宽的转速范围内保持大振幅, 甚至会造成转子毁坏<sup>[1,2]</sup>, 因而应予避免。目前对双稳态响应的研究主要集中在系统参数的影响, 双稳态的跳跃现象及双稳态响应的稳定性等<sup>[3,4]</sup>, 而对双稳态的非线性本质, 如双稳态是怎样产生的? SFDB 对双稳态的影响等几乎未见有关报道, 而这些对设计良好的 SFDB 都是至关重要的。本文将 SFDB 的非线性响应特性与 Duffing 方程的响应特性加以对比, 在理论上解释了双稳态响应的非线性本质。

## 二、系统运动方程

假设如下: 转子是对称的, 轴的质量约一半集中在中间圆盘上, 其余的平均分配在两端的轴承站上; 旋转角速度为常值; 不平衡位于盘平面上; 系统的陀螺效应可忽略不计; 滚动轴承不产生明显的激扰力; 由于定心弹簧的作用, 重力的影响可忽略不计 (图 1)。

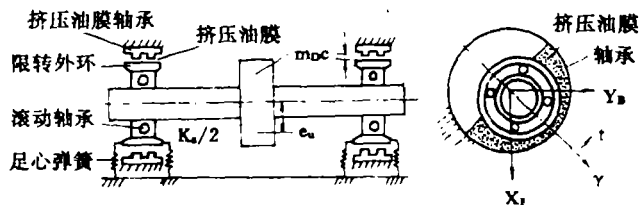


图 1 柔性转子-同心型挤压油膜阻尼器系统简图

在上述假设下, 可写出系统的无量纲运动方程如下<sup>[5]</sup>, 其中 “'” =  $d(\quad)/d\tau$ ,  $\tau = \omega t$ 。

轴颈: 
$$Z_B'' + \frac{1}{2a\Omega^2}(1 + K)Z_B - \frac{1}{2a\Omega^2}Z_D = -\frac{2B}{\Omega}(f_r + if_i)e^{i\tau} \quad (1)$$

转盘: 
$$Z_D'' + 2\zeta Z_D'/\Omega + (Z_D - Z_B)/\Omega^2 = Ue^{i\tau} \quad (2)$$

其中  $\alpha = m_B/m_D$  为质量比, 而  $m_B, m_D$  分别为集中在两端轴承站处的质量;  $\Omega$  为转速比,  $\Omega = \omega/\omega_s$ , 其中  $\omega$  为转子转速,  $\omega_s = \sqrt{K_s/m_D}$  为系统的固有频率 (无阻尼刚支临界), 而  $K_s$  为轴刚度;  $B$  为 SFDB 参数;  $\zeta = Cd/2m_D\omega_s$  为外阻尼率, 其中  $C_d$  为转盘处的外阻尼系数;  $U = e_s/c$  为不平衡参数, 其中  $e_s$  为不平衡偏心距,  $c$  为 SFDB 径向间隙。方程 (1) 的右端为无量纲化的油膜力。在短轴承,  $\pi$  油膜的假设下有:

其中:

$$I_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{(1 + \varepsilon_B \cos\theta)^3} d\theta, \quad I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \frac{\cos^2\theta}{(1 + \varepsilon_B \cos\theta)^3} d\theta$$

$$I_3 = \int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi} \frac{\sin^2\theta}{(1 + \varepsilon_B \cos\theta)^3} d\theta, \quad \theta_1 = \tan^{-1}(\frac{\dot{\varepsilon}_B}{\varepsilon_B \dot{\psi}_B})$$

复变量  $Z_B = X_B + iY_B$ ,  $Z_D = X_D + iY_D$  可写为极式,  $Z_B = \varepsilon_B e^{i\theta_B}$ ,  $Z_D = r_D e^{i\theta_D}$ , 故对稳态圆运动有:  $\dot{\varepsilon}_B = \dot{\varepsilon}_B = 0$ ,  $\dot{\psi}_B = 1$ ,  $Z_B = \varepsilon_0 e^{i\theta_0}$ ,  $\varepsilon_0 = \text{const}$ , 且有:  $Z_B' = iZ_B$ ,  $Z_B'' = -Z_B$ 。对  $Z_D$  有类似结果。这时:

$$-\frac{2B}{\Omega}(f_r + if_i)e^{i\theta_B} = -\frac{2B}{\Omega}(K_0 Z_B + C_0 Z_B) \quad (3)$$

其中  $K_0 = 2\varepsilon_0/(1 - \varepsilon_0^2)^2$ ,  $C_0 = \pi/2 (1 - \varepsilon_0^2)^{3/2}$  为油膜力二系数。将上述关系式代入 (1), (2) 两式得:

$$[\frac{1}{2\alpha}(1 + K) - 1]Z_B - \frac{1}{2\alpha\Omega^2}Z_D = -\frac{2B}{\Omega}(K_0 Z_B + C_0 Z_B) \quad (4)$$

$$[(\frac{1}{\Omega^2} - 1) + \frac{2i\xi}{\Omega}]Z_D - \frac{1}{\Omega^2}Z_B = Ue^{i\tau} \quad (5)$$

### 三、系统幅频曲线的骨架曲线、振幅界限 曲线及对系统双稳态响应的影响

因为对稳态圆响应有  $Z_B = iZ_B$ ,  $Z_B' = -Z_B$ ,  $Z_B = iZ_D$ ,  $Z_D' = -Z_D$ , 由 (5) 式可得:

$$Z_D = \frac{1 - \Omega^2}{Q} Z_B - \frac{2\xi\Omega}{Q} Z_B + \frac{U\Omega^2}{Q^{1/2}} e^{i(\tau - \theta_0)} \quad (6)$$

其中  $Q = (1 + \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2$ ,  $\theta_0 = \tan^{-1}[-2\xi\Omega/(1 - \Omega^2)]$  将 (6) 代入 (3) 式, 可得轴颈运动的等效线性方程:

$$Z_B'' + C_*(\varepsilon_0, \Omega)Z_B' + K_*(\varepsilon_0, \Omega)Z_B = U_*(\Omega)e^{i(\tau - \theta_0)} \quad (7)$$

其中等效阻尼  $C_*$ , 等效刚度  $K_*$  及等效扰力幅  $U_*$  分别为:

$$C_* = \xi/\alpha\Omega Q + 2B/\Omega C_0$$

$$K_* = \frac{1}{2\alpha\Omega^2}(1 + K) - \frac{1 - \Omega^2}{2\alpha\Omega^2 \cdot Q} + \frac{2B}{\Omega}K_0$$

$$U_* = \frac{1}{2\alpha} \frac{U}{Q^{1/2}}$$

故等效阻尼及等效刚度是振幅  $\varepsilon_0$  及转速比  $\Omega$  的函数, 而等效扰力幅是转速比  $\Omega$  的函数。

对稳态圆响应  $Z_B = \varepsilon_0 e^{i\theta_0}$ , 由 (7) 式可得系统的幅频特性曲线:

$$\varepsilon_0 = \frac{U_*}{[(K_* - 1)^2 + C_*^2]^{1/2}} \quad (8)$$

即:

$$\varepsilon_0^2 \left\{ \left[ \frac{1}{2a\Omega^2}(1+K) - \frac{1-\Omega^2}{2a\Omega^2 \cdot Q} + \frac{2B}{\Omega} \frac{2\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} - 1 \right]^2 + \left[ \frac{2\xi\Omega}{2a\Omega^2 \cdot Q} + \frac{2B}{\Omega} \frac{\pi}{2(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \right]^2 \right\} = \frac{U^2}{4a^2Q} \quad (9)$$

幅频曲线(共振曲线)的骨架曲线可由  $K_* - 1 = 0$  求得, 即:

$$\frac{1}{2a\Omega^2} \cdot (1+K) - \frac{1-\Omega^2}{2a\Omega^2 \cdot Q} + \frac{2B}{\Omega} \frac{2\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} - 1 = 0 \quad (10)$$

我们来求幅频曲线与骨架曲线的交点。因为在交点上必有  $K_* - 1 = 0$ , 代入(8)式, 可得关系式:

$$\varepsilon_0 = U_* / C_* \quad (11)$$

$$\text{即: } \left[ \frac{2\xi\Omega}{2a\Omega^2 \cdot Q} + \frac{2B}{\Omega} \frac{\pi}{2(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \right] \varepsilon_0 - \frac{U}{2a} \frac{1}{Q^{1/2}} = 0 \quad (12)$$

(12)式在  $(\varepsilon_0, \Omega)$  平面上确定了一条曲线, 此曲线与骨架曲线(10)相交, 且交点也就在共振曲线(9)上。我们把(12)所确定的曲线称为方程(9)的振幅界限曲线, 该曲线具有以下特性:(a)在此曲线之上, 即当  $\varepsilon_0 > \frac{U_*}{C_*}$  时, 方程(9)无解, 因而此曲线也叫做方程(9)的解的分界线。(b)此曲线在幅频曲线与骨架曲线的交点处与幅频曲线相切。下面予以证明:

由(9)式可解得:

$$\Omega = \frac{1}{2a\Omega} (1+K) - \frac{1-\Omega^2}{2a\Omega Q} + \frac{1B\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0^2)^2} \pm \Omega \left\{ \frac{U^2}{4\varepsilon_0^2 a^2 Q} - \left[ \frac{2\xi\Omega}{2a\Omega^2 Q} + \frac{2B}{\Omega} \frac{\pi}{2(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

故  $\Omega$  有实数解的必要条件是:

$$\frac{U}{2\varepsilon_0 \cdot a \cdot Q^{1/2}} \geq \frac{2\xi\Omega}{2a\Omega^2 \cdot Q} + \frac{2B}{\Omega} \frac{\pi}{2(1-\varepsilon_0^2)^{3/2}}$$

上式中取等号即得振幅界限曲线(12)。其实在(8)式中, 因为  $U_* > 0$ ,  $[(K_* - 1)^2 + C_*^2]^{1/2} > C_*$ , 故幅频曲线(8)总在振幅界限曲线(11)之下。

由于在(12)式中不显含刚度比  $K$ , 故定心弹簧刚度对振幅界限曲线无影响。

下面证明幅频曲线(8)与振幅界限曲线在  $K_* = 1$  处相切, 也就是说幅频曲线与骨架曲线的交点就是幅频曲线与振幅界限曲线的切点。

由幅频曲线

$$\varepsilon_0 = \frac{U_*(\Omega)}{\{[K_*(\varepsilon_0, \Omega) - 1]^2 + C_*^2(\varepsilon_0, \Omega)\}^{1/2}}$$

$$\text{得: } \left. \frac{d\varepsilon_0}{d\Omega} \right|_{K_*=1} = \frac{C_* \frac{dU_*}{d\Omega} - U_* \frac{\partial C_*}{\partial \Omega}}{C_*^2 + U_* \frac{\partial C_*}{\partial \varepsilon_0}}$$

$$\text{再由振幅界限曲线 } \varepsilon_0 = \frac{U_*(\Omega)}{C_*(\varepsilon_0, \Omega)} \quad \text{得:}$$

$$\left. \frac{d\varepsilon_0}{d\Omega} \right|_{K_*=1} = \frac{C_* \frac{dU_*}{d\Omega} - U_* \frac{\partial C_*}{\partial \Omega}}{\partial C_*^2 + U_* \frac{\partial C_*}{\partial \varepsilon_0}}$$

故幅频曲线与振幅界限曲线在  $K_* = 1$  处的导数相同, 因而两曲线在  $K_* = 1$  处相切。又因为  $K_* = 1$  即为骨架曲线, 因而幅频曲线与振幅界限曲线在骨架曲线与振幅界限曲线的交点

处,也即是在幅频曲线与骨架曲线的交点处相切。

对我们所考虑的柔性转子-SFDB系统,由于有两个振幅 $\varepsilon_R$ 、 $\varepsilon_D$ ,故关于 $\varepsilon_0$ 的幅频曲线就可能出现两个波峰,骨架曲线也可能有两枝。下面予以说明:

在骨架曲线(10)中令 $\varepsilon_0=0$ ,求出骨架曲线与 $\Omega$ 轴的交点,这时有:

$$2aP^3 + (1+K-2a-8a\xi^2)P^2 + [16a\xi^2 - 4\xi^2(1+K) - 1]P + 4\xi^2(1+K-2a) = 0 \quad (14)$$

其中 $P=1-\Omega^2$ 。由上式可解出 $\Omega$ 值。为简便起见设 $\xi=0$ ,这时由(14)式可解出:

$$\Omega_{1,2}^2 = 1 + \frac{1}{4a}[(1+K-2a) \pm \sqrt{(1+K-2a)^2 + 8a}] \quad (15)$$

由(15)式可见这时 $\Omega$ 有两个解 $\Omega_1 < 1$ 及 $\Omega_2 > 1$ 。故骨架曲线可分为在 $\Omega < 1$ 及 $\Omega > 1$ 处的两枝。因而幅频曲线的两个波峰位于 $\Omega=1$ 的两侧。因为 $\Omega=1$ 表示的是无阻尼刚支临界位置,所以柔性转子-SFDB系统的一、二阶柔支临界转速是在其无阻尼刚支临界转速的两侧。

显然,(11)式不包含轴承参数 $B$ ,这说明挤压油膜力的引入并不改变原系统的临界点。但是由于油膜力的非线性,会使共振曲线及骨架曲线发生偏转。当这一偏转达到一定程度时,就会发生双稳态响应。需要说明的是,对本文所考虑的系统,骨架曲线的这种偏转,总是具有硬特性,即骨架曲线向转速增加的方向发生偏转。下面予以证明:

由(10)可见,因为 $(2B/\Omega)[2\varepsilon_0/(1-\varepsilon_0^2)^2] \geq 0$ ,故应有:

$$\frac{1}{2a\Omega^2}(1+K) - \frac{1-\Omega^2}{2a\Omega^2[(1-\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2]} - 1 \leq 0$$

设 $\xi \approx 0$ 得:

$$[2aP^2 + (1+K-2a)P - 1] \leq 0, P = 1 - \Omega^2 \quad (16)$$

对 $\Omega < 1$ 的骨架曲线,由(16)式有:

$$2aP^2 + (1+K-2a)P - 1 \leq 0$$

由上式解得:

$$\Omega^2 \geq 1 + [(1+K-2a) - \sqrt{(1+K-2a)^2 + 8a}]/4a = \Omega_1^2$$

对 $\Omega > 1$ 的骨架曲线,由(16)式有:

$$2aP^2 + (1+K-2a)P - 1 \geq 0$$

从而解得:

$$\Omega^2 \geq 1 + \frac{1}{4a}[(1+K-2a) + \sqrt{(1+K-2a)^2 + 8a}] = \Omega_2^2$$

可见无论是对 $\Omega < 1$ 或 $\Omega > 1$ 时的骨架曲线,若记 $\varepsilon_0=0$ 时的 $\Omega$ 为 $\Omega_0$ ,则总有 $\Omega \geq \Omega_0$ ,这说明骨架曲线总是向 $\Omega \geq \Omega_0$ 的方向偏转,也即是向 $\Omega$ 增加的一方偏转,故幅频曲线(9)总是具有硬弹簧特性。

由骨架曲线和振幅界限曲线,可以得到幅频曲线在它和骨架曲线的交点附近的形状,而远离此交点的形状则取决于等效扰力幅 $U$ 及骨架曲线的形状。

另外,骨架曲线与振幅界限曲线的交点数决定了解的非线性特性。考虑在 $\Omega < 1$ 内的一枝骨架曲线及振幅界限曲线,当交点只有一个时,则只能出现Duffing型的非线性,幅频曲线不可能有附加分枝的产生;当交点数为3时,则有用孤立闭合曲线表示的附加分枝产生;当交点数大于3时,就可能出现多个附加分枝。因此,可联立求解(10)和(12)式,从而确定

骨架曲线与振幅界限曲线的交点数。对  $\Omega > 1$  处的骨架曲线和振幅界限曲线有类似结果。

#### 四、数值计算结果及分析

为了说明共振曲线、骨架曲线及振幅界限曲线之间的相互关系,对方程(9)、(10)及(12)进行了数值求解,图2—图5是其中的部分结果。图2是在  $\Omega < 1$  及  $\Omega > 1$  两侧骨架曲线与振幅界限曲线分别只有一个交点的情况,这是单纯的 Duffing 型非线性。图3是在  $\Omega < 1$  一侧有三个交点的情况,这时除了 Duffing 型非线性外,幅频曲线出现了附加分枝,对应于大振幅。

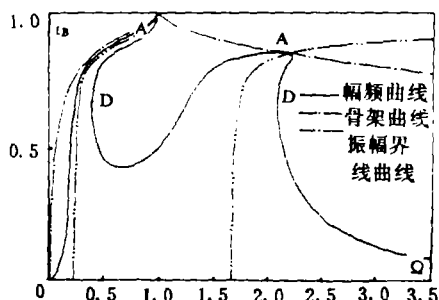


图2. 系统的 Duffing 型非线性响应; 在  $\Omega=1$  两侧骨架曲线与振幅界限曲线分别只有一个交点 ( $U=0.5$ ,  $\xi=0.0005$ ,  $\alpha=0.3$ ,  $B=0.025$ ,  $K=0.1$ )

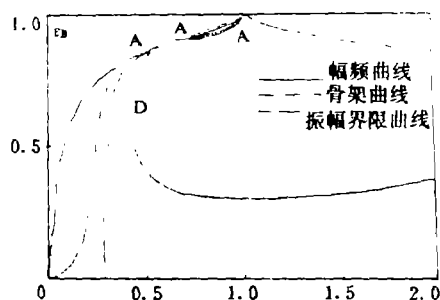


图3. 系统的 Duffing 型及分枝型非线性响应; 骨架曲线与振幅界限曲线有三个交点 ( $U=0.3$ ,  $\xi=0.0005$ ,  $\alpha=0.05$ ,  $B=0.1$ ,  $K=0.1$ )

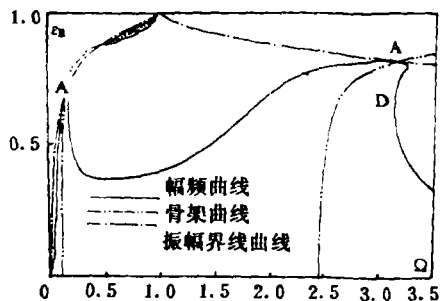


图4.  $\Omega > 1$  时幅频曲线、骨架曲线及振幅界限曲线之间的关系 ( $U=0.4$ ,  $\xi=0.0005$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $B=0.05$ ,  $K=0.01$ )

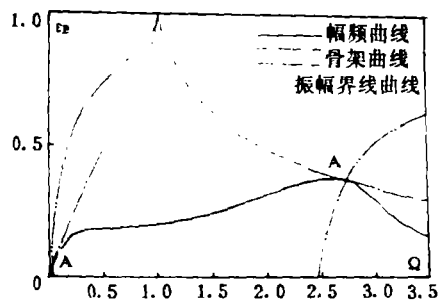


图5. 无双稳态响应时, 幅频曲线、骨架曲线及振幅界限曲线之间的关系 ( $U=0.2$ ,  $\xi=0.0005$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $B=0.3$ ,  $K=0.001$ )

从图中可见, 幅频曲线与振幅界限曲线在 A 点相切, 这点也是幅频曲线与骨架曲线及骨架曲线与振幅界限曲线的交点。另外, 幅频曲线总是位于振幅界限曲线之下, 这与理论分析的结果是一致的。

如前所述, 幅频曲线可能有多个波峰值, 骨架曲线也可能不止一枝, 因而在  $\Omega > 1$  处也可能出现双稳态。这时幅频曲线、骨架曲线及振幅界限曲线之间的关系及性质与  $\Omega < 1$  时的情况是一样的 (见图 4)。这说明虽然我们考虑的是多自由度的转子-SFDB 系统, 但这种系统的非

线性响应特性与单自由度的 *Duffing* 方程的特性是非常类似的。图 5 表示的是无双稳态时三条曲线之间的关系，这时响应曲线的峰值已不明显了。

对 *Duffing* 型的双稳态，由于在双稳态开始点上，幅频曲线具有垂直切线，故可由 (9) 式令  $d\Omega/d\varepsilon_0 = 0$  来确定切点位置，从而确定开始时的转速比。

对 (8) 式求导数并令  $d\Omega/d\varepsilon_0 = 0$  得：

$$[(K_s - 1)^2 + C_s^2] + (K_s - 1) \frac{2B2(1 + \varepsilon_0^2)\varepsilon_0}{\Omega(1 - \varepsilon_0^2)^3} + \frac{3\pi B}{\Omega} \frac{C_s \varepsilon_0^2}{(1 - \varepsilon_0^2)^{5/2}} = 0$$

将上式与 (9) 式联立，即可求得切点坐标，如图 2—图 5 中的 D 点。

需要指出的是，对分枝型双稳态不能用上述办法确定它开始及结束时的坐标，因为这时共振曲线可能是一尖点。

## 五、结 论

1. 本文导出了柔性转子—同心型 SFDB 系统稳态响应的骨架曲线及振幅界限曲线，骨架曲线与振幅界限曲线的交点数决定了响应的非线性形式，由此分析了 *Duffing* 型及附加分枝非线性响应形成的原因。

2. 幅频曲线与振幅界限曲线在骨架曲线与振幅界限曲线的交点处相切。

3. 油膜力的引入并不改变原系统的临界点，但会使幅频曲线发生偏转，且这种偏转总是具有硬弹簧特性。当此偏转达到一定程度时就会出现双稳态响应。

## 参 考 文 献

- [1] 晏锡堂等，“带挤压油膜阻尼器刚性转子的双稳态特性”，航空学会第四届航空发动机结构强度振动专业学术会议论文集，PP76—80，1987。
- [2] Holmes, R., Dede, M., "Nonlinear Performance of a Three Bearing Rotor Incorporating", Proc. of Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, 1986, NASA CP-2443.
- [3] Rabinowitz, M. D., Hahn, E. J., "Steady-state Performance of Squeeze Film Damper Supported Flexible Rotors", ASME paper 77-GT-52.
- [4] Gunter, E. J., Barrett, L. E., Allaire, F. E., "Design of Nonlinear Squeeze Film Damper for Aircraft Engines", ASME. J. of Lub. Tech., Vol. 99, No. 1, 1977, PP57—64.
- [5] 薛中擎，孟光，“柔性转子-挤压油膜阻尼器系统的稳态响应及其非线性特性分析”，《中国航空科技文报》，HJB860361，1986。

(责任编辑：李其汉)

## EXPERIMENTAL INVESTIGATION ON CHARACTERISTICS OF SINGLE AND TANDEM BLADE CASCADES WITH DOUBLE—CIRCULAR ARC PROFILE

Zhuang Biaonan and Guo Bingheng

(Nanjing Aeronautical Institute)

**ABSTRACT** A single cascade and a tandem cascade with double-circular arc profile have been designed and investigated, which have same total cord, total camber, constructional inlet and exit angles, and solidity as the reference tandem compressor stator blade of Turmo III c gas turbine engine. The inlet Mach number is 0.3. The characteristics of both single and tandem cascades, such as the dependence of turning angle  $\Delta\beta$  and coefficient of total pressure loss  $\bar{\omega}$  on incidence angle  $\iota$  have been obtained. The experimental data are compared and analyzed. The tandem cascade features large fluid turning angle and small loss coefficient. For incidence angle from  $-6.5^\circ$  to  $+3.5^\circ$ ,  $\Delta\beta$  of the tandem cascade is larger than  $\Delta\beta$  of the single cascade  $2-5^\circ$ , and  $\bar{\omega}$  of the tandem cascade is smaller than  $\bar{\omega}$  of the single cascade. For example, when  $\iota = 1^\circ$ , for the tandem cascade  $\Delta\beta = 55.4^\circ$ ;  $\bar{\omega} = 0.04$ , for the single cascade  $\Delta\beta = 49.6^\circ$ ,  $\bar{\omega} = 0.076$ .

## STUDY ON NONLINEAR DUFFING CHARACTERISTICS OF FLEXIBLE ROTOR WITH SFDB

Meng Guang and Xue Zhongqing

(Northwestern Polytechnical University)

**ABSTRACT** It is demonstrated theoretically and numerically that the flexible rotor-centralized squeeze film damper bearings (SFDB) system with multiple degrees of freedom has the nonlinear characteristics similar to those of the Duffing equation of one degree of freedom. The bone curve and amplitude limit curve of the amplitude-frequency response curve of the system are derived. The relations among the above three curves and their effects on bistable response are analyzed. It is found that the number of the intersection points of the bone curve with the amplitude limit curve determines the nonlinear forms of the system responses, and the amplitude limit curve is tangential to the amplitude-frequency response curve at the intersection point. Thus it is revealed how the Duffing and bifurcation nonlinear responses are formed. It is also proved that the squeeze film force will not change the rigid critical speed of the original system, but make the amplitude-frequency response curve deflect. This deflection always has the characteristics of hard spring, that is, the amplitude-frequency response curve will deflect in the direction of larger rotating speed. When this deflection reaches a certain degree, the bistable response occurs and it may appear in the both sides of the undamped rigid critical speed of the system.